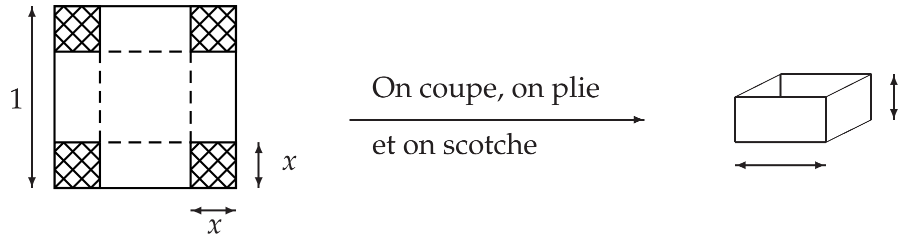
Activité 1 OPTIMISATION : VOLUME D'UNE BOÎTE.

On veut construire une boîte en carton (sans couvercle) en forme de parallélépipède rectangle, à partir d'une feuille carrée de coté unitaire. On coupe les quatre carrés de côté x dans les coins de la feuille comme ci dessous, et on replie les bords pour obtenir la boîte. La question est :

« Y a-t-il une valeur de x pour laquelle le volume de la boîte est maximal ? »



On notera $V(x)$ le volume de la boîte en fonction de x. Vérifiez que la dérivée de V a pour expression :

$$V'(x) = 12x^2 - 8x + 1.$$

Exercice n° 1

On donne ci-dessous le tableau de signes de la dérivée d'une fonction f définie et dérivable sur $[-5\ ;\ 6]$ et $f(-5) = 3$, $f(-1) = -2$, $f(4) = 1$ et $f(6) = -4$. Complétez les variations de f et déterminer le minimum et le maximum de f sur $[-5;6]$ puis sur $[0;6]$ si possible.

x	-5		-1		4		6
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$							

Exercice n° 2

On considère une certaine fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ dont la dérivée a pour expression :

$$f'(x) = 3x(x-1)(-2x+3).$$

Dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.

Exercice n° 3

Étudiez les variations des polynômes P, Q et R sur $\mathbb{R}$ où pour tout $x \in \mathbb{R}$:

- $P(x) = x^3 + 2x^2 + x + 1$
- $Q(x) = x^3 - x^2 + 3x$.
- $R(x) = x^3 - 3x$

Exercice n° 4

Combien un polynôme du troisième degré peut-il avoir de changements de sens de variation ?

Exercice n° 5

On considère la fonction f définie par :

$$f\ :\ x \longmapsto \frac{2x-3}{x^2+1}$$

Justifier que f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ puis déterminer son tableau de variation sur $\mathbb{R}$.

Exercice n° 6 ALGO

Maurice propose l'algorithme suivant à Simone :

① Choisis un nombre,

② multiplie le par 2,

③ ajoute 3,

④ prends l'inverse.

Simone fait plusieurs essais et déclare :
« C'est marrant ! Plus je prends des grands nombres plus mon résultat final est petit ! ».
Ceci est-il toujours vrai ?

Exercice n° 7

On donne ci-dessous le tableau de signes de la dérivée d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ et dérivable sur chaque intervalle $]-\infty;0[$ et $]0;+\infty[$ et $f(-2) = -1$, $f(2) = 1$. Complétez les variations de f et donner une allure possible pour sa courbe.

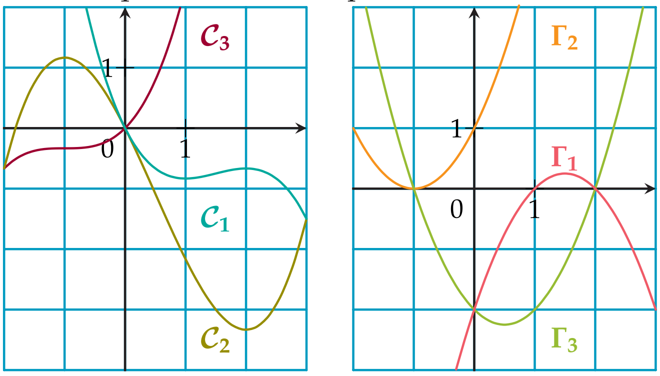
x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$f(x)$					$\Vert$				

Exercice n° 8

Étudier les variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$. Tracer l'allure de sa courbe.

Exercice n° 9

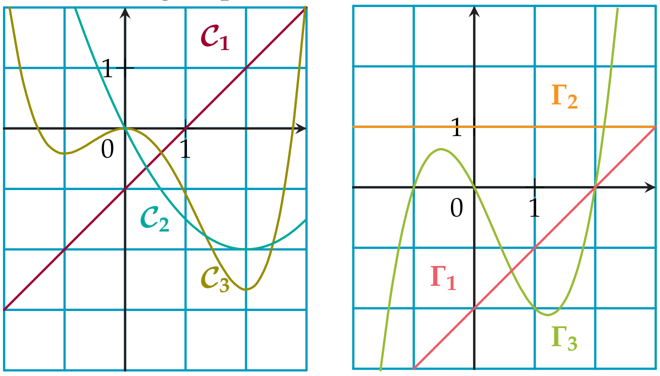
On donne ci-dessous les courbes $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$ représentant trois fonctions définies et dérivables sur $\mathbb{R}$, ainsi que Γ_1, Γ_2 et Γ_3 représentant leur dérivée.



Associer, en justifiant, les courbes par binôme.

Exercice n° 10

Même consigne qu'à l'exercice 9.



Exercice n° 11 — Position relative

Soit $f : x \mapsto x^3 + x^2 - x$.

1. Déterminer les variations de f.
2. Déterminer l'équation de $\mathcal{T}$, tangente à $\mathcal{C}_f$ en $a = 0$.
3. On va étudier la position relative de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{T}$.
   a. Calculer $d(x) = f(x) - (mx + p)$, où $y = mx + p$ est l'équation de $\mathcal{T}$.
   b. Déterminer le signe de $d(x)$.
   c. Compléter :
   « Lorsque $d(x) > 0$, alors $\mathcal{C}_f$ est ... de $\mathcal{T}$ ».
   « Lorsque $d(x) < 0$, alors $\mathcal{C}_f$ est ... de $\mathcal{T}$ ».
   « Lorsque $d(x) = 0$, alors ...... ».
   d. Dans un repère orthonormé, tracer $\mathcal{T}$ puis, à l'aide du tableau de variations de f, donner l'allure de la courbe $\mathcal{C}_f$.

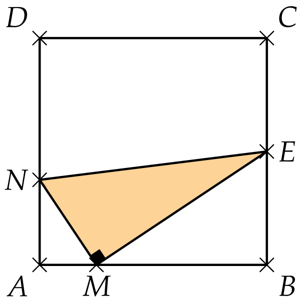
Exercice n° 12 — `Calcul formel`

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{2}\}$ par :

$$f(x) = \frac{x^3 - x^2 - x + 1}{2x + 1}.$$

1. Déterminer $f'(x)$.
2. Étudier le signe de $f'(x)$.
   On pourra utiliser la factorisation suivante obtenue avec GeoGebra :
   ```
   Factoriser[4x^3+x^2-2x-3]
   →   (x − 1) (4 x² + 5x + 3)
   ```
3. En déduire les variations de f.

Exercice n° 13



On considère un carré $ABCD$ de côté 4. Soient E le milieu de $[BC]$, M un point mobile sur le segment $[AB]$ et N le point de $[AD]$ tel que MNE soit rectangle en M.

Le but de l'exercice est de déterminer l'aire maximale de MNE ainsi que la ou les positions du point M rendant cette aire maximale.

1. Conjecturer la solution à l'aide d'un logiciel de géométrie.
2. **a.** Démontrer que $\widehat{AMN} = \widehat{MEB}$.
   b. En utilisant la trigonométrie, en déduire que :
   $$MN = \frac{AM \times EM}{2}.$$
   c. En posant $x = AM$, en déduire qu'une expression de $\mathcal{A} : x \mapsto \mathcal{A}_{MNE}$ est :
   $$\mathcal{A}(x) = \frac{x^3}{4} - 2x^2 + 5x$$
   d. Étudier cette fonction sur son ensemble de définition, que l'on précisera.
   e. Répondre au problème posé.

Démonstrations

Exercice n° 14

Soit f dérivable et croissante sur $\mathbb{R}$. On veut prouver que sa dérivée est positive sur $\mathbb{R}$.
On se donne un réel x et un réel h non nul.

1. Si $h > 0$, comparer $f(x+h)$ et $f(x)$ en déduire le signe du taux d'accroissement de f entre x et $x+h$.
2. Traiter de même le cas $h < 0$.
3. Conclure

Remarque : La réciproque de cette propriété, qui est le sens généralement utilisé ne peut pas être démontrée au lycée.

Exercice n° 15 — Opérations : inverse

Soient u et v deux fonctions définies et dérivables sur un intervalle ouvert I telles que v ne s'annule pas sur I. On définit sur I : $f : x \mapsto \dfrac{1}{v(x)}$.

1. Soit $x \in I$. Démontrer que :
$$\frac{\Delta f}{\Delta x}(x) = \frac{v(x) - v(x+h)}{h \times v(x+h) \times v(x)}.$$
2. En déduire $f'(x)$.

Exercice n° 16 — Opérations : produit

Démontrer la formule de dérivation suivante où u et v désignent des fonctions dérivables sur un même intervalle ouvert I : $(uv)' = u'v + uv'$
On se donne un réel $x \in I$ et h non nul tel que : $x + h \in I$. On prouvera que si $f = uv$ alors le taux d'accroissement de f entre x et $x+h$ s'écrit :

$$\frac{u(x+h) - u(x)}{h} \times v(x) + \frac{v(x+h) - v(x)}{h} \times u(x+h)$$

Exercice n° 17 — Dérivée de u^2.

Soit u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I. Démontrer que $(u^2)' = 2uu'$.

Exercice n° 18 — Opérations : quotient

Soient u et v deux fonctions définies et dérivables sur un intervalle ouvert I telles que v ne s'annule pas sur I. Soit $g : x \mapsto \dfrac{u(x)}{v(x)}$.
En écrivant $g(x)$ comme un produit et en utilisant les propriétés de dérivation déjà établies, déterminer $g'(x)$.

Résumé de cours

Propriété 1 (Produit). *Soient u et v deux fonctions définies et dérivables sur un intervalle ouvert I. Alors le produit uv : $x \mapsto u(x) \times v(x)$ est encore dérivable sur I et :*

$$\boxed{(uv)' = u'v + uv'}$$

Ce qui signifie que pour tout x de I la dérivée de ce produit a pour expression : $u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$

Propriété 2 (Inverse et quotient). *Soient u et v deux fonctions définies et dérivables sur un intervalle ouvert I telles que v ne s'annule pas sur I. Alors l'inverse de v ainsi que le quotient $\frac{u}{v}$ sont encore dérivables sur I et :*

$$\boxed{\left(\frac{1}{v}\right)' = \frac{-v'}{v^2}}$$

$$\boxed{\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}}$$

Théorème 1. *Pour étudier les variations dune fonction f qui est dérivable sur un intervalle ouvert I, on étudie le signe de sa dérivée f'.*
- *Si pour tout x de I on a $f'(x) \geqslant 0$ alors f est croissante sur I.*
- *Si pour tout x de I on a $f'(x) \leqslant 0$ alors f est décroissante sur I.*
- *Si pour tout x de I on a $f'(x) = 0$ alors f est constante sur I.*

Remarque : On a aussi la version strictement *croissante ou décroissante avec des inégalités strictes.*

Corollaire 1 (Extremum). *Si une fonction f admet un extremum, c'est nécessairement en une valeur où sa dérivée s'annule.*

Remarque : On peut préciser : . . . où sa dérivée s'annule et change de signe. *Mais aucune de ces conditions n'est suffisante pour garantir un extremum.*