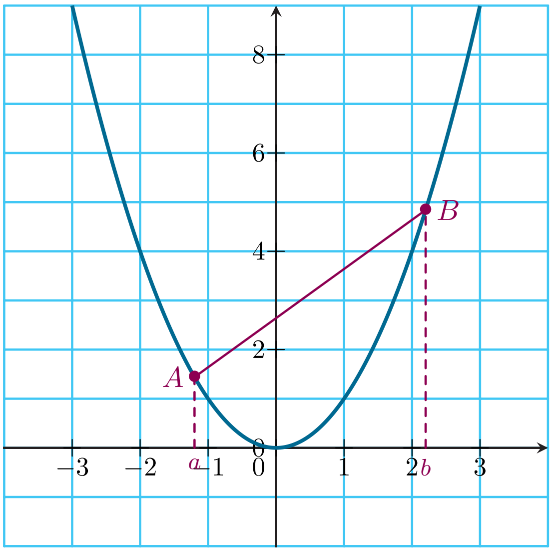
Activité 1 CONVEXE OU CONCAVE ?

Une fonction est **convexe** si sa représentation graphique « *est tournée vers le haut* ».
Mathématiquement, cela signifie que, si A et B sont deux points de la représentation graphique de la fonction, le segment $[AB]$ est entièrement situé au-dessus de la courbe. Si le segment [AB] est entièrement situé en-dessous, la fonction est **concave**.

Un exemple : la fonction carrée



On considère $\mathcal{P}$ la courbe de la fonction carré.
On appelle A et B les points de $\mathcal{P}$ d'abscisses respectives a et b.
On cherche à prouver, sur des exemples, que le segment $[AB]$ est au dessus de $\mathcal{P}$.

1. Dans cette question, on prendra $a = 1$ et $b = 2$.

- **a.** Donner la fonction affine g dont la représentation graphique est la droite (AB).
- **b.** Développer $(x - 1)(x - 2)$.
- **c.** En déduire que $\mathcal{P}$ est en dessous de (AB) sur l'intervalle $[1; 2]$.

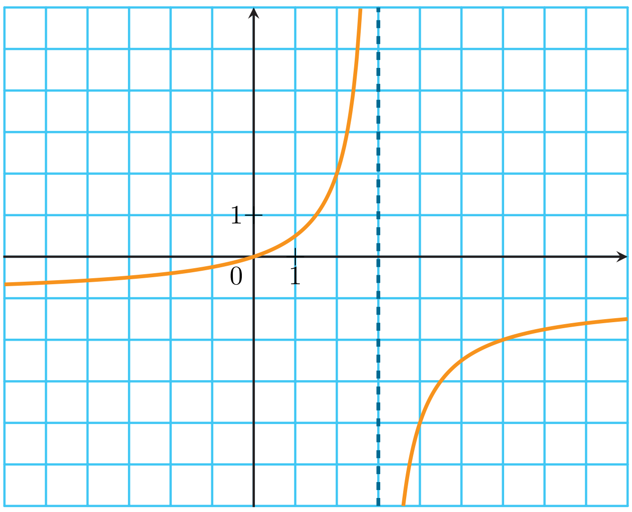
2. Démontrer que, pour $a = -1$ et $b = 1$, le segment $[AB]$ est au-dessus de $\mathcal{P}$.

Une autre fonction !

Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R} - \{3\}$ par : $g(x) = \dfrac{-x}{x-3}$ et sa représentation graphique.

1. Sur quel intervalle la fonction g semble-t-elle concave ?

Soit A et B deux points de la représentation graphique de g. Leurs abscisses respectives sont notées a et b telles que $a < b < 3$.



2. Déterminer la fonction affine h dont la représentation graphique est la droite (AB).

- **a.** Quel est le signe du coefficient directeur ? Pourquoi ?
- **b.** Peut-on déterminer le signe de l'ordonnée à l'origine ? Pourquoi ?

3. Quelle inéquation faut-il résoudre pour démontrer que la fonction g est convexe sur $]-\infty; 3[$?

4. Démontrer que cela revient à résoudre
$x(b - 3)(a - 3) + 3x(x - 3) - ab(x - 3) < 0$.

5. En factorisant, prouver que $A = B$
$A = x(b - 3)(a - 3) + 3x(x - 3) - ab(x - 3)$
$B = 3(x - a)(x - b)$.

6. Conclure.

Exercice n° 1

Écrire sous la forme d'une seule fraction de la manière la plus simple possible.

1. $V = \dfrac{1}{x+1} + \dfrac{2x}{x+1}$
2. $I = \dfrac{5}{2x-1} + 1$
3. $T = 4 + \dfrac{x-1}{3x+5}$

Exercice n° 2

Pour quelle(s) valeur(s) la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{-4+x}{2x+1}$ s'annule-t-elle ?

Exercice n° 3

Parmi les fonctions suivantes, dire lesquelles sont *homographiques*.

1. $f(x) = (2x-1)(x+2)$
2. $g(x) = \dfrac{7}{2x-1}$
3. $h(x) = \dfrac{4x+1}{5x+2}$
4. $i(x) = 4 + \dfrac{x-1}{x-2}$
5. $j(x) = \dfrac{3x-1}{(3x-2)^2}$
6. $k(x) = \dfrac{3x-1}{7x-9} - \dfrac{3-x}{7x-9}$

Exercice n° 4

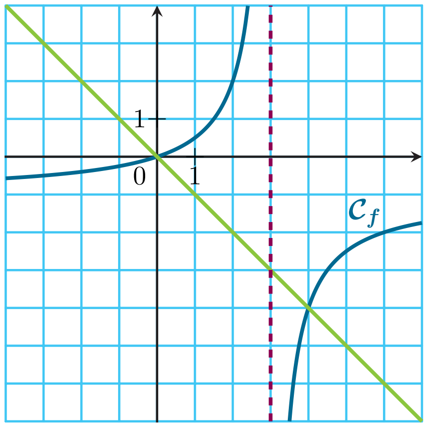
Déterminer pour quelle(s) valeur(s) les fonctions suivantes ne sont pas définies et pour quelle(s) valeur(s) elle s'annulent.

1. $f(x) = \dfrac{-2x+1}{-5x+1}$
2. $g(x) = \dfrac{5x+3}{4x-3}$
3. $h(x) = 2 + \dfrac{3x-1}{4x-7}$

Exercice n° 5

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{3\}$ par :

$$f(x) = \frac{-x}{x-3}.$$



En utilisant le graphique ci-dessous, résoudre :

1. $f(x) \leqslant 1$
2. $f(x) > -x$

Exercice n° 6

1. Étudier le signe de $(2x-1)(x-3)$ et dresser le tableau de signes de cette expression, que l'on note M.
2. En déduire le tableau de signes des expressions.

   a. $O = \dfrac{2x-1}{x-3}$ **b.** $L = \dfrac{2x-1}{3-x}$

Exercice n° 7

Établir le tableau de signes des fonctions suivantes.

1. $f(x) = \dfrac{-x}{x+12}$
2. $g(x) = \dfrac{2x-5}{7+21x}$

Exercice n° 8

Résoudre dans $\mathbb{R}$.

1. $\dfrac{x+2}{-4x+1} > 0$
2. $\dfrac{5x-1}{-3x} \geqslant 0$
3. $\dfrac{7x-3}{(-8x-1)^2} < 0$
4. $\dfrac{3x-4}{x+2} \leqslant 0$

Exercice n° 9

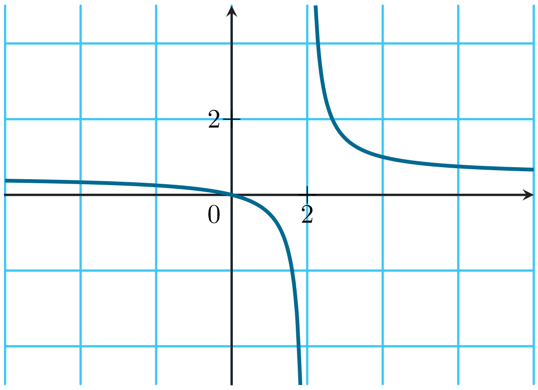
L'objectif est de résoudre $\dfrac{x-7}{x+9} \geqslant 2$.

1. Quelle est la valeur que x ne peut pas prendre ?
2. Déterminer une expression $A(x)$ pour que l'inéquation se ramène à $A(x) \geqslant 0$.
3. Résoudre $A(x) \geqslant 0$.

Définition 1. On appelle **fonction homographique** toute fonction h qui peut s'écrire comme quotient de fonctions affines. Soit a, b, c, d quatre réels tels que $ad - bc \neq 0$ et $c \neq 0$:

$$h(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$$

Propriété 1. Une fonction homographique est définie sur $\mathbb{R}$ privé de la valeur qui annule son dénominateur dite « **valeur interdite** ».



Sa **courbe représentative** est une **hyperbole** qui comporte deux branches disjointes.

Méthode 1. Donner le domaine de définition d'une fonction homographique : pour identifier ce domaine de définition, il suffit de trouver la valeur interdite.

Exemple

Déterminer le domaine de définition de la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{5x+4}{3x-7}$$

Correction

Recherche de la valeur interdite :
$3x - 7 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{7}{3}$

Le domaine de définition de la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{5x+4}{3x-7}$ est $\mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{7}{3}\right\}$.

Méthode 2. Donner le tableau de signes d'une fonction homographique : la méthode est similaire à celle du produit de deux fonctions affines.

La valeur qui **annule le dénominateur** ne faisant pas partie du domaine de définition de la fonction doit être indiquée par **une double barre**.

Exemple

Résoudre l'inéquation $\dfrac{3x-5}{2x+7} > 0$.

Correction

On étudie le signe de la fonction l définie par

$$l(x) = \frac{3x-5}{2x+7}$$

- *Recherche de la valeur interdite :*
  $2x + 7 \neq 0$ *implique* $x \neq -\dfrac{7}{2}$.
  Donc l est définie sur $\mathbb{R} \setminus \left\{-\dfrac{7}{2}\right\}$.
- *Recherche de la valeur qui annule l :*
  $3x - 5 = 0$ *implique* $x = \dfrac{5}{3}$.
- *Comparaison des valeurs trouvées pour les ranger sur la 1re ligne du tableau :*

$$-\frac{7}{2} < \frac{5}{3}$$

x	$-\infty$		$-\frac{7}{2}$		$\frac{5}{3}$		$+\infty$
$3x-5$		$-$	|	$-$	0	$+$	
$2x+7$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$l(x)$		$+$	||	$-$	0	$+$	

Les solutions de l'inéquation $\dfrac{3x-5}{2x+7} > 0$ sont les nombres de l'ensemble $\left]-\infty; -\dfrac{7}{2}\right[\cup \left]\dfrac{5}{3}; +\infty\right[$.