Activité 1 — Presque avec remise

1. Dans un groupe de 40 personnes, 4 ont les yeux verts.

a. Quelle est la proportion de personnes ayant les yeux verts dans ce groupe ?

b. On tire successivement trois personnes au hasard dans ce groupe, **sans remise**.

i. Faire un arbre représentant la situation.

ii. Recopier et compléter le tableau ci-dessous représentant la loi de probabilité de la variable aléatoire X donnant le nombre de personnes ayant les yeux verts dans l'échantillon de trois personnes obtenu (arrondir à 0,000 1 près).

x_i	0	1	2	3
$P(X = x_i)$				

2. Dans un groupe de 10 000 personnes, 1 000 ont les yeux verts.

a. Quelle est la proportion de personnes ayant les yeux verts dans ce groupe ?

b. On en tire successivement trois au hasard, **sans remise**.

Faire un arbre et donner la loi de probabilité de la variable aléatoire Y donnant le nombre de personnes ayant les yeux verts dans l'échantillon de trois personnes obtenu (arrondir à 0,000 1 près).

3. Dans un groupe, la proportion de personnes ayant les yeux verts est $p = 0{,}1$. On en tire successivement trois au hasard, **avec remise** et on considère la variable aléatoire Z donnant le nombre de personnes ayant les yeux verts dans l'échantillon de trois personnes obtenu.

a. Quelle est la loi de probabilité de Z ?

b. Représenter cette loi par un tableau (arrondir à 0,000 1 près).

Activité 2 — Centenaires ! TICE

Dans la population mondiale, la proportion de centenaires est estimée à 0,004 4 %.

À Kyotango Au Japon, la ville de Kyotango compte 58 648 habitants.

1. On souhaite déterminer un intervalle de fluctuation au seuil de 95 % de la fréquence des centenaires dans un échantillon de taille 58 648.

a. Quand on considère une population dans laquelle un caractère apparaît dans une proportion p, rappeler la formule vue en seconde de l'intervalle de fluctuation de la fréquence du caractère pour un échantillon de taille n.

Préciser les conditions d'application sur n et p pour que cette formule soit utilisable.

b. Pourquoi ne peut-on pas appliquer cette formule ici ?

2. a. Tabuler la fonction $x \mapsto P(X \leqslant x)$ où X suit la loi $\mathscr{B}(58\,648\ ;\ 0{,}000\,044)$.

b. En déduire un intervalle de fluctuation au seuil de 95 % du nombre de centenaires dans une ville de 58 648 habitants.

3. La municipalité de Kyotango affirme qu'il y a près d'une centaine de centenaires dans la ville.

Si cette affirmation est vraie, peut-on dire, au risque d'erreur de 5 %, que cette municipalité est représentative de la population mondiale sur ce critère ?

En Basse-Normandie En Basse-Normandie en 2007, on comptait 374 centenaires pour 1 461 000 habitants.

1. Sur ce critère, la Basse-Normandie est-elle représentative de la population mondiale ? On utilisera le tableur plutôt que la calculatrice.

2. Reprendre la question précédente par rapport à la population française dans laquelle la proportion de centenaires est de 0,023 5 %.

3. Commenter les réponses aux deux dernières questions.

Exercice n° 1

On considère une variable aléatoire X suivant la loi $\mathscr{B}(15\ ;\ 0,4)$.

1. Donner l'intervalle de fluctuation au seuil de 95 % du nombre de succès.
2. En déduire l'intervalle de fluctuation au seuil de 95 % de la fréquence de succès.
3. Recommencer les deux questions précédentes avec Y suivant la loi $\mathscr{B}(11\ ;\ 0,65)$.

Exercice n° 2

En 2012, 43 % des Français n'ont lu aucun livre.

1. En utilisant la loi binomiale, donner l'intervalle de fluctuation au seuil de 95 % de la fréquence des personnes n'ayant pas lu de livre en 2012, dans un échantillon de taille 853.
2. Dans un lycée de 853 élèves, 23 élèves ont déclaré ne pas avoir lu de livre en 2012.

   Ce lycée est-il représentatif de la population ? Pouvait-on s'y attendre ?

Exercice n° 3

Une association de lutte contre la discrimination se voit présenter les cas de deux entreprises :

- l'entreprise Savamal dans laquelle 21 des 53 employés sont des femmes ;
- l'entreprise Cébon dans laquelle 459 des 1 027 employés sont des femmes.

Cette association peut-elle penser, au risque d'erreur de 5 % que l'une ou l'autre de ces entreprises pratique la discrimination ? Argumenter.

Par la suite, X désigne une variable aléatoire suivant la loi $\mathscr{B}(n\ ;\ p)$ et a et b deux réels.

Définition 1. On dit que $[a\ ;\ b]$ est un **intervalle de fluctuation au seuil de 95 % (ou 0,95)** du nombre de succès si $P(X \in [a\ ;\ b]) \geqslant 0{,}95$.

Propriété 1. L'intervalle $[a\ ;\ b]$ où :

- a est le plus petit entier tel que $P(X \leqslant a) > 0{,}025$
- b est le plus petit entier tel que $P(X \leqslant b) \geqslant 0{,}975$

est un intervalle de fluctuation au seuil de 95 %.

Exemple méthodique : Soit X une variable aléatoire suivant la loi $\mathscr{B}(20\ ;\ 0{,}3)$, déterminer un intervalle de fluctuation au seuil de 95 % du nombre de succès.

Calculatrice TI

- Appuyer sur f(x) puis sur 2nde et stats pour accéder au menu **distrib** et saisir `Y1=binomFRép(20,0.3,X)`.
- Tabuler la fonction :

X	Y1
0	8E-4
1	.00764
2	.03548
3	.10709

- Déterminer les valeurs de `X` pour lesquelles `Y1` dépasse pour la première fois 0,025 et 0,975 : on obtient $a = 2$ et $b = 10$.

Calculatrice CASIO

- Dans le menu **TABLE**, appuyer sur OPTN puis ▭▸ puis **STAT** puis **DIST** puis **BINM** et saisir `Y1=BinomialCD(X,20,0.3)`.
- Tabuler la fonction :

X	Y1
0	7.9E-4
1	7.6E-3
2	0.0354
3	0.107

- Déterminer les valeurs de `X` pour lesquelles `Y1` dépasse pour la première fois 0,025 et 0,975 : on obtient $a = 2$ et $b = 10$.

- L'intervalle $[2\ ;\ 10]$ est donc un intervalle de fluctuation au seuil de 95 % du nombre de succès.
- L'intervalle $\left[\frac{2}{20}\ ;\ \frac{10}{20}\right] = [0{,}1\ ;\ 0{,}5]$ est donc un intervalle de fluctuation à 95% de la fréquence du caractère dans l'échantillon.