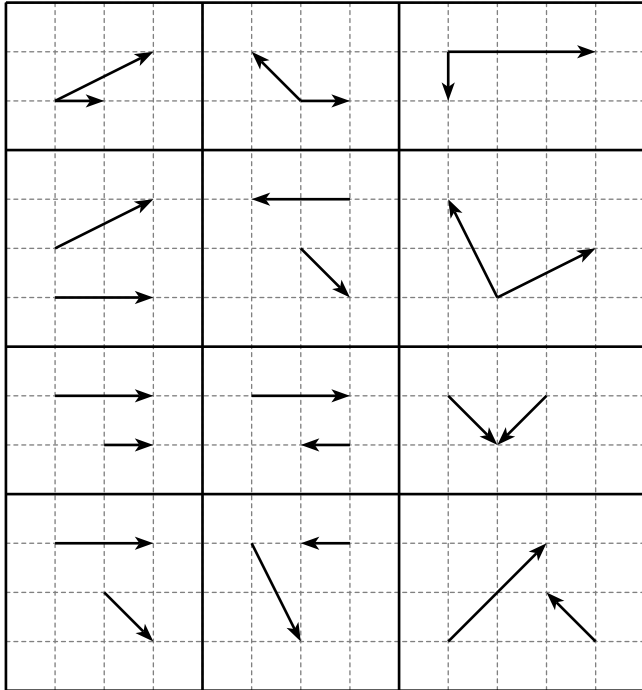


Projections

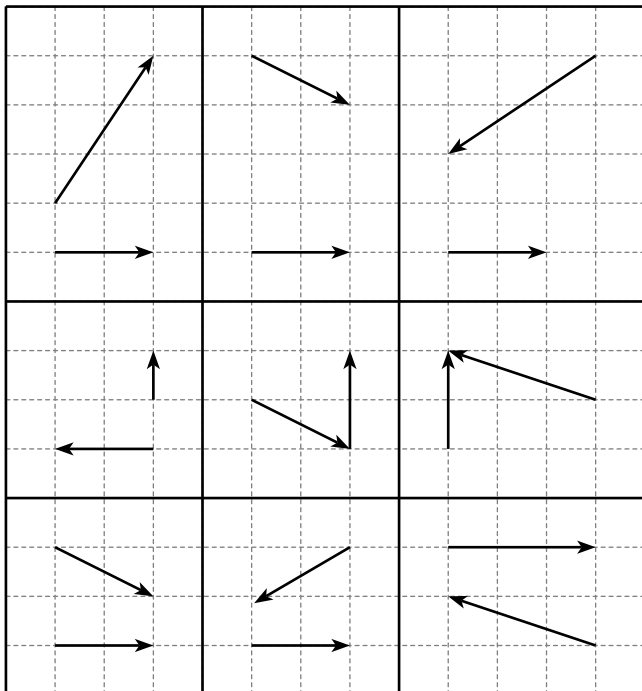
Exercice n° 1

Déterminer par projection de l'un sur l'autre le produit scalaire des deux vecteurs dans chaque case. L'unité est le carreau.



Exercice n° 2

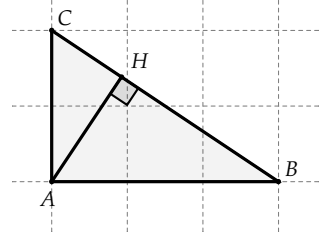
Déterminer par projection de l'un sur l'autre le produit scalaire des deux vecteurs dans chaque case. L'unité est le carreau.



Exercice n° 3

ABC est rectangle en A . L'unité est le carreau.

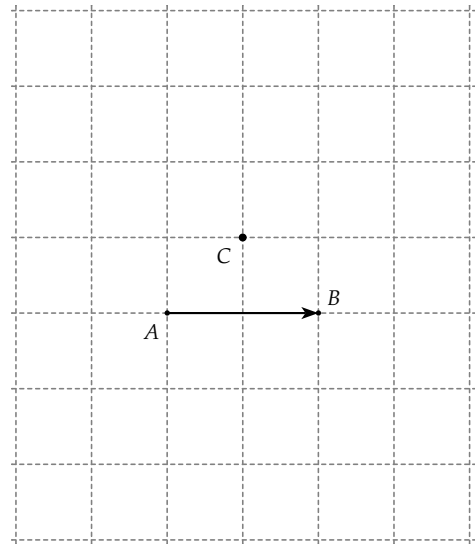
1. $\vec{AB} \cdot \vec{CA} =$
2. $\vec{BC} \cdot \vec{BA} =$
3. $BC =$
4. En déduire BH .



Exercice n° 4

Tracer sur la figure l'ensemble \mathcal{L}_2 des points M tels que $\vec{AB} \cdot \vec{CM} = 2$.

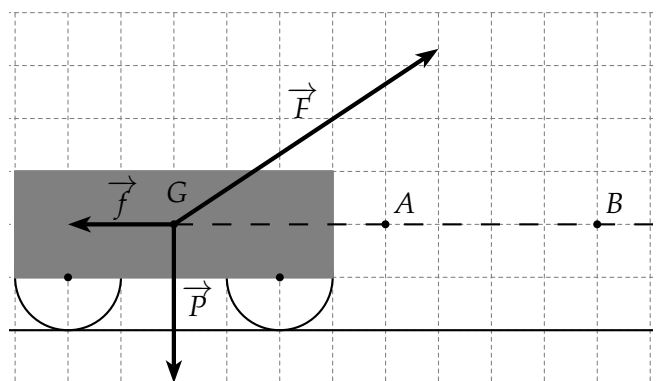
Tracez de même \mathcal{L}_k ensemble des points M tels que $\vec{AB} \cdot \vec{CM} = k$ pour les valeurs $k = 4$ puis $k = 0$, et $k = -6$.



Exercice n° 5 — **Travail d'une force**

En Sciences Physiques on définit le travail $W_{A \rightarrow B}(\vec{F})$ (énergie en Joules) d'une force \vec{F} sur un déplacement de A à B comme le produit scalaire :

$$W_{A \rightarrow B}(\vec{F}) = \vec{F} \cdot \vec{AB}$$



On a représenté un wagonnet qui roule sur des rails, entraîné par une force de traction \vec{F} , soumis à son poids \vec{P} et subissant une force de frottements \vec{f} . Calculez le travail de chacune de ces forces lorsque le centre de gravité du wagonnet se déplacera de A à B . On prendra un carreau comme unité (pour les mètres et les Newton).

1. $W_{A \rightarrow B}(\vec{F}) =$
2. $W_{A \rightarrow B}(\vec{f}) =$
3. $W_{A \rightarrow B}(\vec{P}) =$

Formule avec cosinus

Exercice n° 6

ABC est un triangle équilatéral de côté 6. Calculez $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$ et $\vec{AB} \cdot \vec{BC}$.

Exercice n° 7

Soit \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs.

1. Justifier que $\vec{u} \cdot \vec{v}$ et $\vec{v} \cdot \vec{u}$ sont égaux.
2. Justifier que $(2\vec{u}) \cdot \vec{v} = 2 \times (\vec{u} \cdot \vec{v})$.

Exercice n° 8

Soit ABC un triangle tel que $AB = 6$, $AC = 4$, $\widehat{ABC} = 60^\circ$ et $\widehat{BAC} = 30^\circ$. Calculez :

1. $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$
2. $\vec{AC} \cdot \vec{BC}$
3. $\vec{BA} \cdot \vec{BC}$

Exercice n° 9 ————— **Al-Kashi**

Soit ABC un triangle tel que $AB = 4$, $AC = 3$, $\widehat{BAC} = 60^\circ$. Calculez BC

Exercice n° 10

$ABCD$ est un carré de côté 4 et de centre O , calculez les produits scalaires par la méthode de votre choix :

- | | | |
|------------------------------|------------------------------|------------------------------|
| 1. $\vec{AB} \cdot \vec{CD}$ | 4. $\vec{AC} \cdot \vec{BD}$ | 7. $\vec{OC} \cdot \vec{OB}$ |
| 2. $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$ | 5. $\vec{AD} \cdot \vec{BC}$ | 8. $\vec{OA} \cdot \vec{OC}$ |
| 3. $\vec{BA} \cdot \vec{DA}$ | 6. $\vec{AD} \cdot \vec{CD}$ | 9. $\vec{OB} \cdot \vec{AD}$ |

Exercice n° 11

On considère un triangle ABC où $AB = 5$ et $BC = 6$ et $\widehat{ABC} = 60^\circ$.

1. Faire une figure.
2. Calculer $\vec{BA} \cdot \vec{BC}$.
3. Calculer $\vec{CA} \cdot \vec{CB}$.

On remarquera d'abord que $\vec{CA} = \vec{CB} + \vec{BA}$.

Formule avec longueurs uniquement

Exercice n° 12

Soit \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs.

1. En développant $(\vec{u} - \vec{v})^2$ retrouver la formule : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (||\vec{u}||^2 + ||\vec{v}||^2 - ||\vec{u} - \vec{v}||^2)$.
2. Déterminer une formule analogue faisant intervenir $||\vec{u} + \vec{v}||^2$
3. Tracez un parallélogramme $ABCD$ où on note $\vec{u} = \vec{AB}$ et $\vec{v} = \vec{AC}$. Traduire les deux relations précédentes pour $\vec{u} \cdot \vec{v}$ avec les longueurs de la figure.

Exercice n° 13

On considère un triangle ABC où $AB = 3$, $AC = 2$ et $BC = \sqrt{7}$

1. Calculez $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$.
2. En déduire \widehat{BAC}

Exercice n° 14

On considère un parallélogramme $ABCD$ où $AB = \sqrt{3}$, $AC = \sqrt{15}$ et $AD = \sqrt{6}$

1. Calculez $\vec{AB} \cdot \vec{AD}$.
2. En déduire \widehat{BAD}

Exercice n° 15

On considère un triangle ABC avec : $AB = 1$, $AC = 2$ et $BC = 3$. Déterminer une valeur approchée des angles de ce triangle.

Exercice n° 16

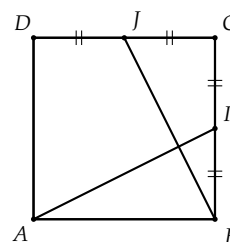
Soit ABC un triangle quelconque établir une formule permettant de calculer \widehat{BAC} en fonction des côtés du triangle.

Orthogonalité. (Chasles)

Exercice n° 17

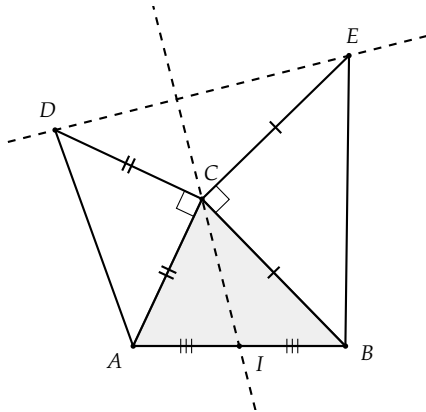
$ABCD$ est un carré. On note I et J les milieux respectifs de $[BC]$ et $[CD]$.

En développant $(\vec{AB} + \vec{BI}) \cdot (\vec{BC} + \vec{CJ})$, prouver que : $(AI) \perp (BJ)$.



Exercice n° 18

On considère un triangle quelconque ABC , I le milieu de $[AB]$ et les points D et E tels que les triangles directs ACD et CBE soient isocèles et rectangles en C .



1. Quelle conjecture faire sur (CI) et (ED) ?
2. Justifier que $\vec{CI} = \frac{1}{2}\vec{CA} + \frac{1}{2}\vec{CB}$.
3. En déduire que :

$$\vec{CI} \cdot \vec{DE} = \frac{1}{2} (\vec{CA} \cdot \vec{CE} - \vec{CB} \cdot \vec{CD}).$$

4. Conclure.

Formule analytique : $xx' + yy'$

Dans ces exercices on se place dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

Exercice n° 19 — Démonstrations

Soit $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$.

① En développant : $\vec{u} \cdot \vec{v} = (x\vec{i} + y\vec{j}) \cdot (x'\vec{i} + y'\vec{j})$ établir la formule analytique du produit scalaire :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$$

② Établir cette même formule en partant de

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2)$$

Rappel : On sait que $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$

Exercice n° 20

Calculer les produits scalaires suivants :

1. $\vec{u} \cdot \vec{v}$ où $\vec{u} \begin{pmatrix} 15 \\ -8 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \end{pmatrix}$
2. $\vec{s} \cdot \vec{t}$ où $\vec{s} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\vec{t} \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \end{pmatrix}$

3. $\vec{a} \cdot \vec{b}$ où $\vec{a} \begin{pmatrix} \sqrt{3}-2 \\ 6 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} \begin{pmatrix} \sqrt{3}+2 \\ 1 \end{pmatrix}$

4. $\vec{c} \cdot \vec{UV}$ où $\vec{c} \begin{pmatrix} \sqrt{6} \\ 2 \end{pmatrix}$, $U(\sqrt{24}+5; 1)$, $V(5; \sqrt{2})$

5. $\vec{r} \cdot \vec{AB}$ où $\vec{r} \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}$, $A(-1; 2)$ et $B(-3; 6)$

6. $\vec{CD} \cdot \vec{MR}$ où $C(5; 6)$, $D(-1; 4)$, $M(3; 7)$ et $R(8; 9)$

7. $\vec{ST} \cdot \vec{EF}$ où $E(0; 1)$, $F(3; 0)$, $S(8; 8)$ et $T(5; 5)$

Exercice n° 21

On considère les points $A(1 ; 3)$, $B(3 ; 1)$, $C(-2 ; -2)$, $D(13 ; -5)$ et $E(4 ; 3)$.

1. Les droites (AC) et (AB) sont-elles perpendiculaires ?
2. Même question pour :
 - a. (AC) et (BD)
 - b. (BE) et (CD)

Exercice n° 22

On considère trois points $A(\sqrt{6}; \sqrt{7})$, $B(\sqrt{2}; \sqrt{3})$, $C(-\sqrt{6}; \sqrt{7} + 2\sqrt{3})$.

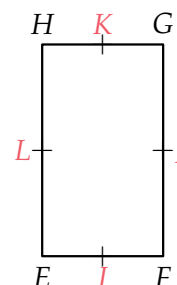
Montrer que ABC est rectangle en B .

Exercice n° 23

Reprendre l'exercice n° 17 en utilisant un repère orthonormé adapté et en utilisant la formule analytique du produit scalaire.

Exercice n° 24

On considère le rectangle $EFGH$ ci-dessous, tel que $EF = 4$ et $EH = 7$, et les points I, J, K et L , milieux respectifs des côtés $[EF]$, $[FG]$, $[GH]$ et $[EH]$.



1. Reproduire la figure.
2. En choisissant un repère orthonormé adapté, calculer :

a. $\vec{EG} \cdot \vec{FH}$	c. $\vec{EF} \cdot \vec{GH}$	e. $\vec{IL} \cdot \vec{IC}$
b. $\vec{JL} \cdot \vec{EG}$	d. $\vec{HF} \cdot \vec{EK}$	f. $\vec{HJ} \cdot \vec{JK}$

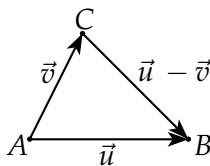
I Diverses expressions.

Dans cette page, \vec{u} et \vec{v} désignent deux vecteurs quelconques. Le produit scalaire de deux vecteurs peut être défini de diverses manières et on a les formules suivantes qui sont équivalentes. On choisit la plus adaptée selon le contexte de l'exercice.

Avec des normes uniquement :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2)$$

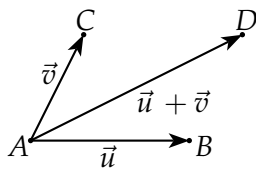
$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \frac{1}{2} (AB^2 + AC^2 - BC^2)$$



On retrouve rapidement cette formule en développant $(\vec{u} - \vec{v})^2$. On a aussi une formule équivalente en développant $(\vec{u} + \vec{v})^2$:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$$

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \frac{1}{2} (AD^2 - AB^2 - AC^2)$$



Avec des normes et un angle :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\widehat{(\vec{u}; \vec{v})})$$

Par projection orthogonale :

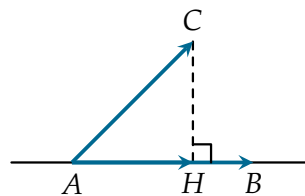
Soit A, B et C trois points distincts du plan et H est le projeté orthogonal de C sur (AB). On a alors :

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \vec{AB} \cdot \vec{AH}$$

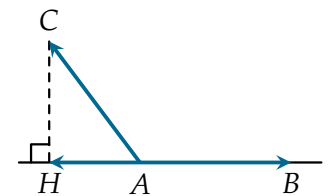
Pour $H \neq A$, il y a deux configurations possibles :

\vec{AB} et \vec{AH} ont même sens :

\vec{AB} et \vec{AH} sont de sens opposés :



$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = AB \times AH$$



$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = -AB \times AH$$

Formule analytique (dans un repère orthonormé) :

Soit $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$$

II Propriétés

- ① Le produit scalaire est commutatif : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$ (Symétrie des les formules, sauf par projection).
- ② Carré scalaire : On note \vec{u}^2 le carré scalaire d'un vecteur \vec{u} (c'est un réel positif) : $\vec{u}^2 = \vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$.
- ③ Les opérations avec le produit scalaire se passent bien. Par exemple : ce produit est distributif sur l'addition de vecteurs : $(\vec{u} + \vec{v})(\vec{w} + \vec{z}) = \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{u} \cdot \vec{z} + \vec{v} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{z}$. On a donc aussi les identités habituelles pour $(\vec{u} + \vec{v})^2$. Il est associatif avec la multiplication par un réel k : $(k\vec{u}) \cdot \vec{v} = k(\vec{u} \cdot \vec{v})$ de sorte que ces parenthèses sont inutiles. Le vecteur nul est absorbant : $\vec{0} \cdot \vec{u} = 0$ quel que soit \vec{u} , etc.
- ④ Orthogonalité. Deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont dit orthogonaux (ce qu'on note $\vec{u} \perp \vec{v}$) si, et seulement si, $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$. Le vecteur nul est donc orthogonal à tout vecteur.

Dire que deux droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires revient à dire que $\vec{AB} \cdot \vec{CD} = 0$.

- ⑤ Al-Kashi. (aka "The cosine rule") En comparant les deux premières écritures du produit scalaire on a dans un triangle ABC une formule permettant de déterminer un troisième côté si on connaît l'angle entre deux côtés connus. On retrouve le théorème de Pythagore quand l'angle est droit :

$$CB^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$$