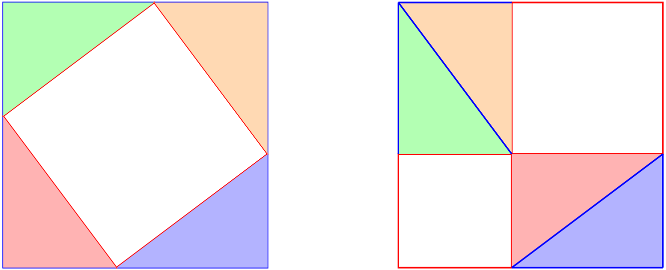
À la découverte du produit scalaire

MATHaZAY

Janvier 2009

Sommaire

De l'égalité à l'inégalité

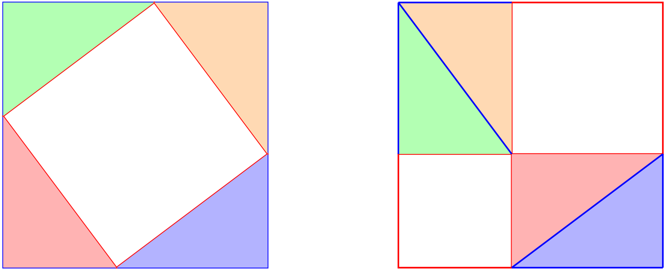


- Vers −500, un certain Pythagore nous lègue un théorème permettant de conclure à l'orthogonalité en B d'un triangle ABC partant d'une égalité d'aires :

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$

- 1 900 ans après, un autre mathématicien, Al Kashi, pose et résout la question : «mais que devient cette égalité pour un triangle quelconque ?»

De l'égalité à l'inégalité



- Vers −500, un certain Pythagore nous lègue un théorème permettant de conclure à l'orthogonalité en B d'un triangle ABC partant d'une égalité d'aires :

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$

- 1 900 ans après, un autre mathématicien, Al Kashi, pose et résout la question : «mais que devient cette égalité pour un triangle quelconque ?»

Le troisième terme

- Objet de la recherche : trouver le troisième terme de l'égalité dans un triangle quelconque.

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 + T$$

- Pour déterminer ce terme, empruntons une invention du XIX^e siècle : le vecteur.
- Considérons le «troisième côté» AC : $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$

- Sur le principe d'un développement bien connu, nous devrions pouvoir écrire :

$$\overrightarrow{AC}^2 = \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right)^2 = \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{BC}^2 + 2\,\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{BC}$$

- Et le terme manquant serait alors donné par le curieux OMNI (objet mathématique non identifié) :

$$2\,\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{BC}$$

Le troisième terme

- Objet de la recherche : trouver le troisième terme de l'égalité dans un triangle quelconque.

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 + T$$

- Pour déterminer ce terme, empruntons une invention du XIX^e siècle : le vecteur.
- Considérons le «troisième côté» AC : $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$

- Sur le principe d'un développement bien connu, nous devrions pouvoir écrire :

$$\overrightarrow{AC}^2 = \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right)^2 = \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{BC}^2 + 2\,\overrightarrow{AB}\;\overrightarrow{BC}$$

- Et le terme manquant serait alors donné par le curieux OMNI (objet mathématique non identifié) :

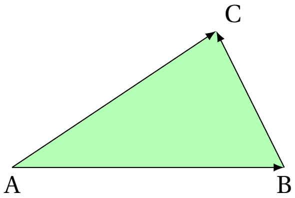
$$2\,\overrightarrow{AB}\;\overrightarrow{BC}$$

Le troisième terme

- Objet de la recherche : trouver le troisième terme de l'égalité dans un triangle quelconque.

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 + T$$

- Pour déterminer ce terme, empruntons une invention du XIX^{e} siècle : le vecteur.
- Considérons le «troisième côté» AC : $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$



- Sur le principe d'un développement bien connu, nous devrions pouvoir écrire :

$$\overrightarrow{AC}^2 = \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right)^2 = \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{BC}^2 + 2\,\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{BC}$$

- Et le terme manquant serait alors donné par le curieux OMNI (objet mathématique non identifié) :

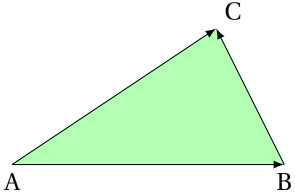
$$2\,\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{BC}$$

Le troisième terme

- Objet de la recherche : trouver le troisième terme de l'égalité dans un triangle quelconque.

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 + T$$

- Pour déterminer ce terme, empruntons une invention du XIX[e] siècle : le vecteur.
- Considérons le «troisième côté» AC : $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$



- Sur le principe d'un développement bien connu, nous devrions pouvoir écrire :

$$\overrightarrow{AC}^2 = \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right)^2 = \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{BC}^2 + 2\,\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{BC}$$

- Et le terme manquant serait alors donné par le curieux OMNI (objet mathématique non identifié) :

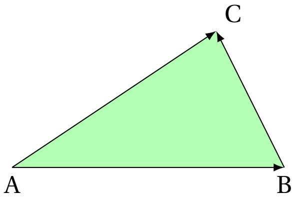
$$2\,\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{BC}$$

Le troisième terme

- Objet de la recherche : trouver le troisième terme de l'égalité dans un triangle quelconque.

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 + T$$

- Pour déterminer ce terme, empruntons une invention du XIX^e siècle : le vecteur.
- Considérons le «troisième côté» AC : $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$



- Sur le principe d'un développement bien connu, nous devrions pouvoir écrire :

$$\overrightarrow{AC}^2 = \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right)^2 = \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{BC}^2 + 2\,\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{BC}$$

- Et le terme manquant serait alors donné par le curieux OMNI (objet mathématique non identifié) :

$$2\,\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{BC}$$

Double produit

- Par comparaison avec le théorème de Pythagore, nous pouvons raisonnablement supposer que $\overrightarrow{AB}^2$, $\overrightarrow{BC}^2$ et $\overrightarrow{AC}^2$ sont des aires donc des carrés de longueurs.
- Par la force des choses, le terme restant devrait *aussi* être homogène à une aire donc à un carré de longueurs et le produit de vecteurs $2\overrightarrow{AB}\ \overrightarrow{BC}$ devrait contenir le produit des longueurs : $2 \times AB \times BC$.
- Intéressons-nous à cette question : si on double la mesure d'un côté AB ou BC (en gardant l'angle $\widehat{ABC}$ constant)... le produit $2\overrightarrow{AB}\ \overrightarrow{BC}$ double-t-il aussi ? Faisons quelques essais.

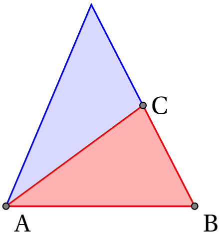
Double produit

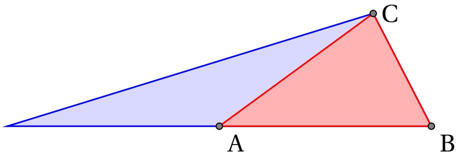
- Par comparaison avec le théorème de Pythagore, nous pouvons raisonnablement supposer que $\overrightarrow{AB}^2$, $\overrightarrow{BC}^2$ et $\overrightarrow{AC}^2$ sont des aires donc des carrés de longueurs.
- Par la force des choses, le terme restant devrait *aussi* être homogène à une aire donc à un carré de longueurs et le produit de vecteurs $2\overrightarrow{AB}\ \overrightarrow{BC}$ devrait contenir le produit des longueurs : $2 \times AB \times BC$.
- Intéressons-nous à cette question : si on double la mesure d'un côté AB ou BC (en gardant l'angle $\widehat{ABC}$ constant)... le produit $2\overrightarrow{AB}\ \overrightarrow{BC}$ double-t-il aussi ? Faisons quelques essais.

Double produit

- Par comparaison avec le théorème de Pythagore, nous pouvons raisonnablement supposer que $\overrightarrow{AB}^2$, $\overrightarrow{BC}^2$ et $\overrightarrow{AC}^2$ sont des aires donc des carrés de longueurs.
- Par la force des choses, le terme restant devrait *aussi* être homogène à une aire donc à un carré de longueurs et le produit de vecteurs $2\overrightarrow{AB}\ \overrightarrow{BC}$ devrait contenir le produit des longueurs : $2 \times AB \times BC$.
- Intéressons-nous à cette question : si on double la mesure d'un côté AB ou BC (en gardant l'angle $\widehat{ABC}$ constant)... le produit $2\overrightarrow{AB}\ \overrightarrow{BC}$ double-t-il aussi ? Faisons quelques essais.

Doublons





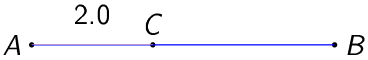
AB	*BC*	AC	produit
5	3	4,5	13,75
5	*6*	5,79	*27,5*

AB	BC	AC	produit
5	3	4,5	13,75
10	3	9,03	*27,5*

Pas de doute, ce produit $2\,\overrightarrow{\mathrm{AB}}\;\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ est bien proportionnel aux mesures des côtés... Reste donc à savoir s'il est strictement égal à $\left(2\times\mathrm{AB}\times\mathrm{BC}\right)$ ou si un autre facteur est présent, nommons le k, c'est à dire si : $2\,\overrightarrow{\mathrm{AB}}\;\overrightarrow{\mathrm{BC}} = k\times\left(2\times\mathrm{AB}\times\mathrm{BC}\right)$.

Le troisième côté

Reprenons un triangle dont nous allons faire varier l'angle $\alpha = (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})$ (figure animée)



Le dernier facteur

- Calculons : $k = \dfrac{AC^2 - AB^2 - BC^2}{2 \times AB \times BC}$
- Reprenons les valeurs de α de nos triangles déjà vus :

α	0	15	30	45	60	75	90
k	-1	-0,97	-0,87	-0,71	-0,5	-0,26	0

α	90	105	120	135	150	165	180
k	0	0,26	0,5	0,71	0,86	0,97	1

- Ces valeurs de k en fonction de α nous font penser à...
- un cosinus ? cos(α) ou...
- serait-ce « $-\cos(\alpha)$ »?

Le dernier facteur

- Calculons : $k = \dfrac{AC^2 - AB^2 - BC^2}{2 \times AB \times BC}$
- Reprenons les valeurs de α de nos triangles déjà vus :

α	0	15	30	45	60	75	90
k	-1	-0,97	-0,87	-0,71	-0,5	-0,26	0

α	90	105	120	135	150	165	180
k	0	0,26	0,5	0,71	0,86	0,97	1

- Ces valeurs de k en fonction de α nous font penser à...
- un cosinus ? cos(α) ou...
- serait-ce « $-\cos(\alpha)$ »?

Le dernier facteur

- Calculons : $k = \dfrac{AC^2 - AB^2 - BC^2}{2 \times AB \times BC}$
- Reprenons les valeurs de α de nos triangles déjà vus :

α	0	15	30	45	60	75	90
k	-1	-0,97	-0,87	-0,71	-0,5	-0,26	0

α	90	105	120	135	150	165	180
k	0	0,26	0,5	0,71	0,86	0,97	1

- Ces valeurs de k en fonction de α nous font penser à...
- un cosinus ? $\cos(\alpha)$ ou...
- serait-ce « $-\cos(\alpha)$ »?

Le dernier facteur

- Calculons : $k = \dfrac{AC^2 - AB^2 - BC^2}{2 \times AB \times BC}$
- Reprenons les valeurs de α de nos triangles déjà vus :

α	0	15	30	45	60	75	90
k	-1	-0,97	-0,87	-0,71	-0,5	-0,26	0

α	90	105	120	135	150	165	180
k	0	0,26	0,5	0,71	0,86	0,97	1

- Ces valeurs de k en fonction de α nous font penser à...
- un cosinus ? cos(α) ou...
- serait-ce « $-\cos(\alpha)$ »?

Le dernier facteur

- Calculons : $k = \dfrac{AC^2 - AB^2 - BC^2}{2 \times AB \times BC}$
- Reprenons les valeurs de α de nos triangles déjà vus :

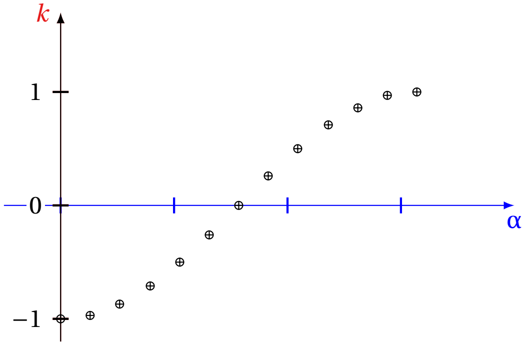
α	0	15	30	45	60	75	90
k	-1	-0,97	-0,87	-0,71	-0,5	-0,26	0

α	90	105	120	135	150	165	180
k	0	0,26	0,5	0,71	0,86	0,97	1

- Ces valeurs de k en fonction de α nous font penser à...
- un cosinus ? cos(α) ou...
- serait-ce « $-\cos(\alpha)$ »?

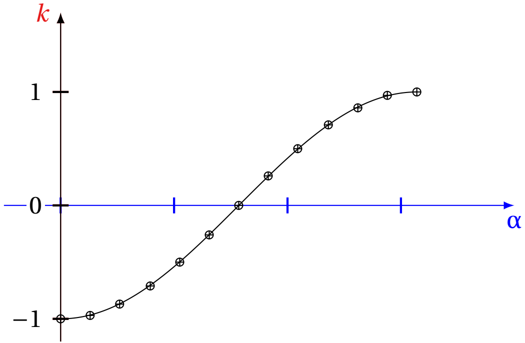
Le dernier facteur sonne toujours deux fois

- Reprenons les valeurs de k en fonction de α exprimé en radians :
- Et superposons la courbe de $\alpha \longmapsto k = -\cos(\alpha)$



Le dernier facteur sonne toujours deux fois

- Reprenons les valeurs de k en fonction de α exprimé en radians :
- Et superposons la courbe de $\alpha \longmapsto k = -\cos(\alpha)$



Pour tout triangle !

C'est gagné !
Et l'on peut écrire, pour tout triangle :

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \times AB \times BC \times \cos(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})$$

…comme Al Kashi l'avait établi.

Quoi d'autre ? Une expression...

- Nous avons vu que le troisième terme était un produit de deux vecteurs :

$$2\,\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{BC}$$

- Et nous avons établi sa valeur :

$$-2 \times AB \times BC \times \cos(\overrightarrow{BC}\,,\overrightarrow{BA}\,) = 2 \times AB \times BC \times \cos(\overrightarrow{AB}\,,\overrightarrow{BC}\,)$$

Car

$$(\overrightarrow{AB}\,,\overrightarrow{BC}\,) = \pi - (\overrightarrow{BC}\,,\overrightarrow{BA}\,)$$

- Par conséquent :

$$\boxed{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = AB \times BC \times \cos(\overrightarrow{AB}\,,\overrightarrow{BC}\,)}$$

- Ce produit de deux vecteurs (*noté avec un point entre les deux vecteurs*) donne un **nombre**.
- Il est désigné comme **produit *scalaire*** des deux vecteurs.

Quoi d'autre ? Une expression...

- Nous avons vu que le troisième terme était un produit de deux vecteurs :

$$2\,\overrightarrow{AB}\;\overrightarrow{BC}$$

- Et nous avons établi sa valeur :

$$-2 \times AB \times BC \times \cos(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) = 2 \times AB \times BC \times \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC})$$

Car

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = \pi - (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})$$

- Par conséquent :

$$\boxed{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = AB \times BC \times \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC})}$$

- Ce produit de deux vecteurs (*noté avec un point entre les deux vecteurs*) donne un **nombre**.
- Il est désigné comme **produit *scalaire*** des deux vecteurs.

Quoi d'autre ? Une expression...

- Nous avons vu que le troisième terme était un produit de deux vecteurs :

$$2\,\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{BC}$$

- Et nous avons établi sa valeur :

$$-2\times AB\times BC\times\cos(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA})=2\times AB\times BC\times\cos(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC})$$

Car

$$(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC})=\pi-(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA})$$

- Par conséquent :

$$\boxed{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=AB\times BC\times\cos(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC})}$$

- Ce produit de deux vecteurs (*noté avec un point entre les deux vecteurs*) donne un **nombre**.
- Il est désigné comme **produit *scalaire*** des deux vecteurs.

Quoi d'autre ? Une expression...

- Nous avons vu que le troisième terme était un produit de deux vecteurs :

$$2\,\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{BC}$$

- Et nous avons établi sa valeur :

$$-2 \times AB \times BC \times \cos(\overrightarrow{BC}\,,\overrightarrow{BA}\,) = 2 \times AB \times BC \times \cos(\overrightarrow{AB}\,,\overrightarrow{BC}\,)$$

Car

$$(\overrightarrow{AB}\,,\overrightarrow{BC}\,) = \pi - (\overrightarrow{BC}\,,\overrightarrow{BA}\,)$$

- Par conséquent :

$$\boxed{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = AB \times BC \times \cos(\overrightarrow{AB}\,,\overrightarrow{BC}\,)}$$

- Ce produit de deux vecteurs (*noté avec un point entre les deux vecteurs*) donne un **nombre**.
- Il est désigné comme **produit *scalaire*** des deux vecteurs.

Quoi d'autre ? Une expression...

- Nous avons vu que le troisième terme était un produit de deux vecteurs :

$$2\,\overrightarrow{AB}\;\overrightarrow{BC}$$

- Et nous avons établi sa valeur :

$$-2 \times AB \times BC \times \cos(\overrightarrow{BC}\,,\overrightarrow{BA}\,) = 2 \times AB \times BC \times \cos(\overrightarrow{AB}\,,\overrightarrow{BC}\,)$$

Car

$$(\overrightarrow{AB}\,,\overrightarrow{BC}\,) = \pi - (\overrightarrow{BC}\,,\overrightarrow{BA}\,)$$

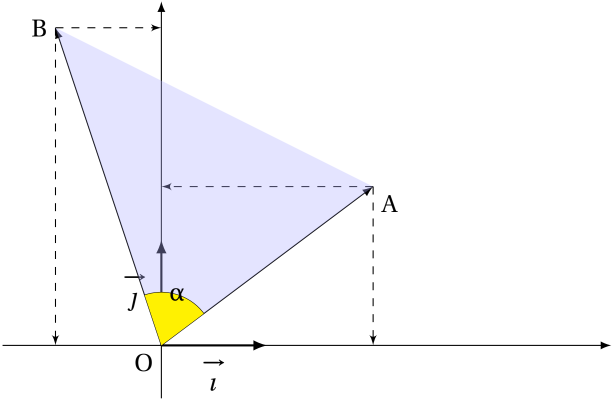
- Par conséquent :

$$\boxed{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC} = AB \times BC \times \cos(\overrightarrow{AB}\,,\overrightarrow{BC}\,)}$$

- Ce produit de deux vecteurs (*noté avec un point entre les deux vecteurs*) donne un **nombre**.
- Il est désigné comme **produit *scalaire*** des deux vecteurs.

Repérons-nous

- Plaçons nos deux vecteurs dans un repère orthonormé.

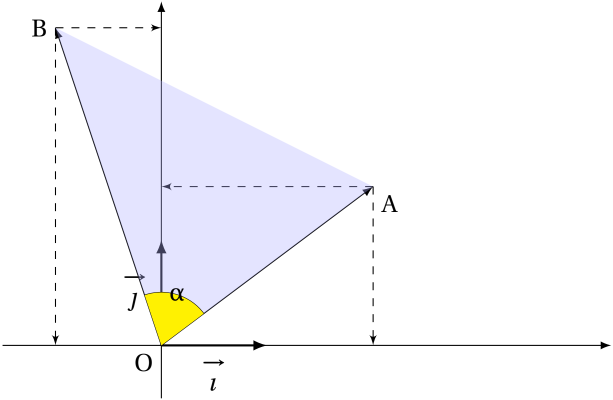


- Désignons par $\vec{i}$ et $\vec{j}$ les deux vecteurs à la base du repère :

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = (x\vec{i} + y\vec{j}) \cdot (x'\vec{i} + y'\vec{j})$$

Repérons-nous

- Plaçons nos deux vecteurs dans un repère orthonormé.



- Désignons par $\vec{i}$ et $\vec{j}$ les deux vecteurs à la base du repère :

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = (x\vec{i} + y\vec{j}) \cdot (x'\vec{i} + y'\vec{j})$$

Développons quelques principes

- Nous avons vu que le produit scalaire de deux vecteurs comportait un $\cos(\alpha)$ et deux longueurs (la *norme* de chaque vecteur) dans le produit :
  - donc si les deux vecteurs sont orthogonaux, il est nul car $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$
  - et si les deux vecteurs sont identiques, il est égal au carré de la norme (longueur) car $\cos(0) = 1$
  - par conséquent : $\boxed{\overrightarrow{i} \cdot \overrightarrow{j} = 0}$ et $\boxed{\overrightarrow{j} \cdot \overrightarrow{i} = 0}$
  - par conséquent : $\boxed{\overrightarrow{i} \cdot \overrightarrow{i} = 1}$ et $\boxed{\overrightarrow{j} \cdot \overrightarrow{j} = 1}$
- Le développement donne :

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = (x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j}) \cdot (x'\overrightarrow{i} + y'\overrightarrow{j})$$

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = x\,x' \boxed{\overrightarrow{i} \cdot \overrightarrow{i}} + x\,y' \boxed{\overrightarrow{i} \cdot \overrightarrow{j}} + y\,x' \boxed{\overrightarrow{j} \cdot \overrightarrow{i}} + y\,y' \boxed{\overrightarrow{j} \cdot \overrightarrow{j}}$$

- Soit finalement :

$$\boxed{\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = x\,x' + y\,y'}$$

Développons quelques principes

- Nous avons vu que le produit scalaire de deux vecteurs comportait un $\cos(\alpha)$ et deux longueurs (la *norme* de chaque vecteur) dans le produit :
  - donc si les deux vecteurs sont orthogonaux, il est nul car $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$
  - et si les deux vecteurs sont identiques, il est égal au carré de la norme (longueur) car $\cos(0) = 1$
  - par conséquent : $\boxed{\vec{i} \cdot \vec{j} = 0}$ et $\boxed{\vec{j} \cdot \vec{i} = 0}$
  - par conséquent : $\boxed{\vec{i} \cdot \vec{i} = 1}$ et $\boxed{\vec{j} \cdot \vec{j} = 1}$
- Le développement donne :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (x\vec{i} + y\vec{j}) \cdot (x'\vec{i} + y'\vec{j})$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' \boxed{\vec{i} \cdot \vec{i}} + xy' \boxed{\vec{i} \cdot \vec{j}} + yx' \boxed{\vec{j} \cdot \vec{i}} + yy' \boxed{\vec{j} \cdot \vec{j}}$$

- Soit finalement :

$$\boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'}$$

Développons quelques principes

- Nous avons vu que le produit scalaire de deux vecteurs comportait un $\cos(\alpha)$ et deux longueurs (la *norme* de chaque vecteur) dans le produit :
  - donc si les deux vecteurs sont orthogonaux, il est nul car $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$
  - et si les deux vecteurs sont identiques, il est égal au carré de la norme (longueur) car $\cos(0) = 1$
  - par conséquent : $\boxed{\vec{i} \cdot \vec{j} = 0}$ et $\boxed{\vec{j} \cdot \vec{i} = 0}$
  - par conséquent : $\boxed{\vec{i} \cdot \vec{i} = 1}$ et $\boxed{\vec{j} \cdot \vec{j} = 1}$
- Le développement donne :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (x\vec{i} + y\vec{j}) \cdot (x'\vec{i} + y'\vec{j})$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = x x' \boxed{\vec{i} \cdot \vec{i}} + x y' \boxed{\vec{i} \cdot \vec{j}} + y x' \boxed{\vec{j} \cdot \vec{i}} + y y' \boxed{\vec{j} \cdot \vec{j}}$$

- Soit finalement :

$$\boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = x x' + y y'}$$

Développons quelques principes

- Nous avons vu que le produit scalaire de deux vecteurs comportait un $\cos(\alpha)$ et deux longueurs (la *norme* de chaque vecteur) dans le produit :
  - donc si les deux vecteurs sont orthogonaux, il est nul car $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$
  - et si les deux vecteurs sont identiques, il est égal au carré de la norme (longueur) car $\cos(0) = 1$
  - par conséquent : $\boxed{\overrightarrow{i} \cdot \overrightarrow{j} = 0}$ et $\boxed{\overrightarrow{j} \cdot \overrightarrow{i} = 0}$
  - par conséquent : $\boxed{\overrightarrow{i} \cdot \overrightarrow{i} = 1}$ et $\boxed{\overrightarrow{j} \cdot \overrightarrow{j} = 1}$
- Le développement donne :

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = (x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j}) \cdot (x'\overrightarrow{i} + y'\overrightarrow{j})$$

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = xx' \boxed{\overrightarrow{i} \cdot \overrightarrow{i}} + xy' \boxed{\overrightarrow{i} \cdot \overrightarrow{j}} + yx' \boxed{\overrightarrow{j} \cdot \overrightarrow{i}} + yy' \boxed{\overrightarrow{j} \cdot \overrightarrow{j}}$$

- Soit finalement :

$$\boxed{\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = xx' + yy'}$$

Développons quelques principes

- Nous avons vu que le produit scalaire de deux vecteurs comportait un $\cos(\alpha)$ et deux longueurs (la *norme* de chaque vecteur) dans le produit :
  - donc si les deux vecteurs sont orthogonaux, il est nul car $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$
  - et si les deux vecteurs sont identiques, il est égal au carré de la norme (longueur) car $\cos(0) = 1$
  - par conséquent : $\boxed{\vec{i} \cdot \vec{j} = 0}$ et $\boxed{\vec{j} \cdot \vec{i} = 0}$
  - par conséquent : $\boxed{\vec{i} \cdot \vec{i} = 1}$ et $\boxed{\vec{j} \cdot \vec{j} = 1}$
- Le développement donne :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (x\vec{i} + y\vec{j}) \cdot (x'\vec{i} + y'\vec{j})$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' \boxed{\vec{i} \cdot \vec{i}} + xy' \boxed{\vec{i} \cdot \vec{j}} + yx' \boxed{\vec{j} \cdot \vec{i}} + yy' \boxed{\vec{j} \cdot \vec{j}}$$

- Soit finalement :

$$\boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'}$$

Développons quelques principes

- Nous avons vu que le produit scalaire de deux vecteurs comportait un $\cos(\alpha)$ et deux longueurs (la *norme* de chaque vecteur) dans le produit :
  - donc si les deux vecteurs sont orthogonaux, il est nul car $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$
  - et si les deux vecteurs sont identiques, il est égal au carré de la norme (longueur) car $\cos(0) = 1$
  - par conséquent : $\boxed{\overrightarrow{i} \cdot \overrightarrow{j} = 0}$ et $\boxed{\overrightarrow{j} \cdot \overrightarrow{i} = 0}$
  - par conséquent : $\boxed{\overrightarrow{i} \cdot \overrightarrow{i} = 1}$ et $\boxed{\overrightarrow{j} \cdot \overrightarrow{j} = 1}$
- Le développement donne :

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = (x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j}) \cdot (x'\overrightarrow{i} + y'\overrightarrow{j})$$

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = x\,x' \boxed{\overrightarrow{i} \cdot \overrightarrow{i}} + x\,y' \boxed{\overrightarrow{i} \cdot \overrightarrow{j}} + y\,x' \boxed{\overrightarrow{j} \cdot \overrightarrow{i}} + y\,y' \boxed{\overrightarrow{j} \cdot \overrightarrow{j}}$$

- Soit finalement :

$$\boxed{\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = x\,x' + y\,y'}$$

Développons quelques principes

- Nous avons vu que le produit scalaire de deux vecteurs comportait un $\cos(\alpha)$ et deux longueurs (la *norme* de chaque vecteur) dans le produit :
  - donc si les deux vecteurs sont orthogonaux, il est nul car $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$
  - et si les deux vecteurs sont identiques, il est égal au carré de la norme (longueur) car $\cos(0) = 1$
  - par conséquent : $\boxed{\overrightarrow{i} \cdot \overrightarrow{j} = 0}$ et $\boxed{\overrightarrow{j} \cdot \overrightarrow{i} = 0}$
  - par conséquent : $\boxed{\overrightarrow{i} \cdot \overrightarrow{i} = 1}$ et $\boxed{\overrightarrow{j} \cdot \overrightarrow{j} = 1}$
- Le développement donne :

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = (x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j}) \cdot (x'\overrightarrow{i} + y'\overrightarrow{j})$$

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = x x' \boxed{\overrightarrow{i} \cdot \overrightarrow{i}} + x y' \boxed{\overrightarrow{i} \cdot \overrightarrow{j}} + y x' \boxed{\overrightarrow{j} \cdot \overrightarrow{i}} + y y' \boxed{\overrightarrow{j} \cdot \overrightarrow{j}}$$

- Soit finalement :

$$\boxed{\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = x x' + y y'}$$

Deux premières formules

L'expression du produit scalaire :

- en fonction de l'angle des deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$:

$$\boxed{\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \|u\| \times \|v\| \times \cos(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})}$$

- en fonction des coordonnées des vecteurs (en repère orthonormé) :

$$\boxed{\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = xx' + yy'}$$

Deux premières formules

L'expression du produit scalaire :

- en fonction de l'angle des deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$:

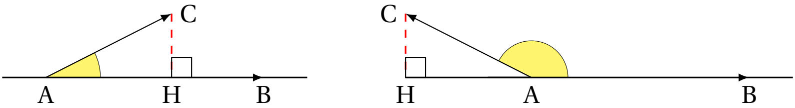
$$\boxed{\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \|u\| \times \|v\| \times \cos(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})}$$

- en fonction des coordonnées des vecteurs (en repère orthonormé) :

$$\boxed{\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = x\,x' + y\,y'}$$

Et une dernière pour la route

En fonction de la projection H de C sur (AB) :



- Si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont de même sens, l'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est alors aigu :

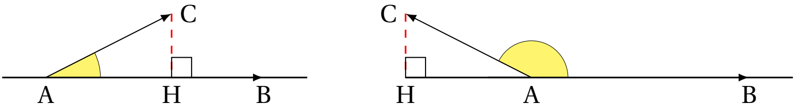
$$\boxed{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AH}$$

- Si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont sens opposés, l'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est alors obtus :

$$\boxed{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -AB \times AH}$$

Et une dernière pour la route

En fonction de la projection H de C sur (AB) :



- Si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont de même sens, l'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est alors aigu :

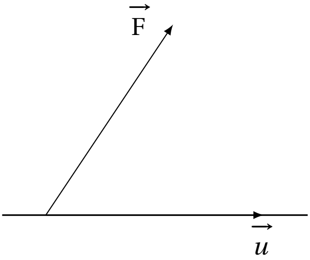
$$\boxed{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AH}$$

- Si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont sens opposés, l'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est alors obtus :

$$\boxed{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -AB \times AH}$$

En physique

En physique, le travail de la force $\overrightarrow{F}$ *dans le déplacement* $\overrightarrow{u}$

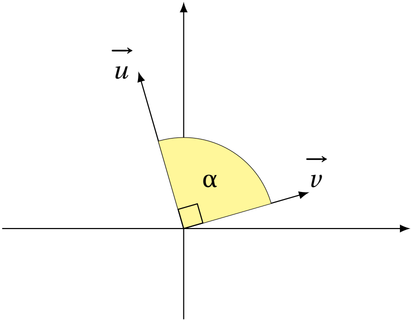


est donné par le produit scalaire $\boxed{\overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{u}}$

Angle droit

Si les deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux :

$$\boxed{\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 0}$$

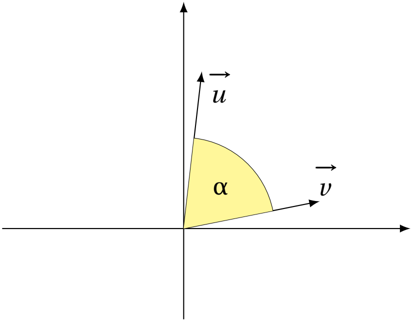


En physique, si $\boxed{\overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{u} = 0}$ *, on dira que le* ***travail de la force est nul***

Angle aigu

Si l'angle des deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ est inférieur à l'angle droit :

$$\boxed{\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} > 0}$$

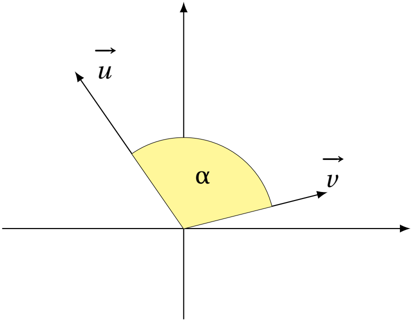


En physique, si $\boxed{\overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{u} > 0}$ *, on dira que le* ***la force est motrice***

Angle obtus

Si l'angle des deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ est supérieur à l'angle droit :

$$\boxed{\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} < 0}$$



En physique si $\boxed{\overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{u} < 0}$ *, on dira que le* **la force est résistante**

Sommaire

Figure de base