Vecteur normal à une droite.

Exercice nº 1

Donner un vecteur normal à la droite :

1. d_1 d'équation : $2x - 3y + 5 = 0$
2. d_2 d'équation : $12x - 3y = 2$
3. d_3 d'équation : $8x = -9y + 7$
4. d_4 d'équation : $-3y + 2x = 5$
5. d_5 d'équation $5y = 2$

Exercice nº 2

Dire si la proposition est vraie ou fausse.

1. Le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ est normal à la droite d'équation $4x - 6y = 1$.
2. Le vecteur $\vec{v}\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$ est normal à la droite d'équation $5y + 4x - 8 = 0$.
3. Le vecteur $\vec{w}\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ est normal à la droite d'équation $-2y + 2x = 5$.

Exercice nº 3

Déterminer une équation de la droite dont on donne un vecteur normal et un point :

$\vec{a}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $A(2\,;\,-5)$; $\vec{b}\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $B(-3\,;\,6)$

$\vec{c}\begin{pmatrix} 47 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $C(2\,;\,-3)$; $\vec{e}\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$ et $E(7\,;\,8)$

Exercice nº 4

On considère trois points $A(3\,;\,4)$, $B(-2\,;\,5)$ et $C(0\,;\,-1)$. Déterminer une équation de :

1. la perpendiculaire à $[AC]$ passant par B
2. la hauteur issue de C dans ABC
3. la médiatrice de $[BC]$

Exercice nº 5

On considère trois points $F(2\,;\,5)$, $G(4\,;\,-1)$ et $H(-1\,;\,3)$.

1. Déterminer les équations des hauteurs issues de H et F dans le triangle FGH.
2. En déduire les coordonnées de l'orthocentre de FGH.

Exercice nº 6

On reprend les points F, G et H de l'exo précédent.

1. Déterminer les équations des médiatrices de $[FG]$ et $[GH]$.
2. En déduire les coordonnées du centre du cercle circonscrit à FGH.

Exercice nº 7

On considère trois points $M(-4\,;\,3)$, $N(4\,;\,0)$ et $P(-1\,;\,-2)$.

1. Déterminer une équation de d, la hauteur issue de P dans MNP.
2. Déterminer une équation de la droite (MN).
3. **a.** Déterminer les coordonnées de P', pied de la hauteur issue de P dans MNP.
   b. En déduire la longueur PP'.
4. En déduire l'aire de MNP.

Équations de cercles.

Exercice nº 8

Donner une équation du cercle :

1. de centre $\Omega_1(2\,;\,6)$ et de rayon 3
2. de centre $\Omega_2(-3\,;\,4)$ et de rayon $\sqrt{7}$

Exercice nº 9

On considère trois points $A(1\,;\,2)$, $B(4\,;\,6)$ et $C(-3\,;\,-8)$.

Donner une équation du cercle de diamètre :

1. $[AB]$ 2. $[BC]$ 3. $[AC]$

Exercice nº 10

On considère l'équation (E) : $x^2 - 8x + y^2 - 6y = 0$.

1. Écrire $x^2 - 8x$ et $y^2 - 6y$ sous forme canonique.
2. En déduire que (E) est l'équation d'un cercle de centre Ω et de rayon r à préciser.

Exercice nº 11

Déterminer l'ensemble d'équation :

1. $x^2 + 6x + y^2 - 12y = -40$
2. $x^2 + 20x + y^2 + 40y + 499 = 0$
3. $x^2 - 2x + y^2 - 6y + 10 = 0$
4. $x^2 - 6x + y^2 + 4y + 30 = 0$

Exercice n° 12

On considère le cercle $\mathscr{C}$ de centre $A(3\ ;\ -4)$ et de rayon 2.

1. Donner une équation de $\mathscr{C}$.

2. Représenter $\mathscr{C}$ dans un repère orthonormé.

3. a. Déterminer deux points diamétralement opposés de $\mathscr{C}$.

b. En déduire une « nouvelle » équation de $\mathscr{C}$.

c. Montrer que les équations trouvées aux questions **1)** et **3)b)** sont équivalentes.

Exercice n° 13

On considère la droite d'équation $x + 3y - 5 = 0$ et le cercle d'équation $(x-4)^2 + (y+2)^2 = 9$.

1. Résoudre le système :

$$\begin{cases} x + 3y - 5 = 0 \\ (x-4)^2 + (y+2)^2 = 9 \end{cases}$$

2. Interpréter géométriquement les solutions du système.

Exercice n° 14

Déterminer les points d'intersection éventuels du cercle d'équation $(x+5)^2 + y^2 = 9$ et de la droite :

1. d_1 d'équation $3x - y + 20 = 0$

2. d_2 d'équation $3x + y = 5$

Exercice n° 15

On considère trois points $A(1\ ;\ 3)$, $B(2\ ;\ -1)$ et $C(6\ ;\ 8)$.

1. Donner une équation de $\mathscr{C}$, le cercle de centre A et de rayon $\sqrt{26}$.

2. Déterminer une équation du cercle de diamètre $[BC]$.

3. Résoudre le système :

$$\begin{cases} (x-1)^2 + (y-3)^2 = 26 \\ x^2 - 8x + y^2 - 7y + 4 = 0 \end{cases}$$

4. Concrètement, à quoi correspondent les solutions du système ? Contrôler avec un logiciel de géométrie.

TRIGONOMÉTRIE

Exercice n° 16

1. Calculer $\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\pi}{6}$.

2. En déduire $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$.

Exercice n° 17

Soit x un réel.

1. Montrer que $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$.

2. a. Exprimer $\cos(2x)$ en fonction de $\cos^2 x$ et $\sin^2 x$.

b. En utilisant l'identité $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, montrer que : $\cos(2x) = 1 - 2\sin^2 x$.

3. a. Justifier que $\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 2\cos^2\left(\dfrac{\pi}{8}\right) - 1$ puis déterminer $\cos\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$.

b. En déduire $\sin\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$.

4. Déterminer de même $\cos\left(\dfrac{5\pi}{8}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{5\pi}{8}\right)$.

Exercice n° 18

On veut résoudre $\cos(x) + \sin(x) = \lambda$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.

1. Justifier que cette équation est équivalente à : $\cos(x)\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right) + \sin(x)\sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\lambda$.

2. Simplifier cette équation avec une formule d'addition.

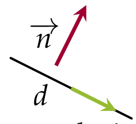
3. En déduire l'ensemble des solutions de :
$\cos(x) + \sin(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

4. Quelles sont les valeurs de λ pour lesquelles l'équation $\cos(x) + \sin(x) = \lambda$ admet des solutions ?

On se place dans le plan muni d'un repère orthonormé.

I Vecteur normal à une droite

Définition 1. Dans le plan, on dit qu'un vecteur non nul $\overrightarrow{n}$ est **normal** à une droite d s'il est orthogonal à un vecteur directeur de d.
$\overrightarrow{n}$ est alors orthogonal à tout vecteur directeur de d.



Caractérisation d'une droite par un point et un vecteur normal : On sait qu'il existe une droite et une seule passant par un point donné A et perpendiculaire à une droite donnée.

On peut donc considérer la droite passant par un point $A(x_A; y_A)$ et de vecteur normal donné $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$:

Propriété 1. *La droite d passant par $A(x_A; y_A)$ et de vecteur normal $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est l'ensemble des points $M(x; y)$ vérifiant $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{n} = 0$ c'est à dire vérifiant $a(x - x_A) + b(y - y_A) = 0$ ce qui donne une équation cartésienne de d de la forme : $ax + by + c = 0$. Réciproquement :*

Propriété 2. *Toute équation de la forme $ax + by + c = 0$ avec $(a; b) \neq (0; 0)$ est celle d'une droite dont $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est un vecteur normal.*

Propriété 3. *Si $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est un vecteur normal d'une droite d, alors $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ en est un vecteur directeur.*

Par symétrie $\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{u} = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{n}$, on peut donc échanger les mots *normal* et *directeur* dans la prop. précédente.

II Équation de cercle

Propriété 4 (Équation de cercle)**.** *Dans un repère orthonormé du plan :*
- *le cercle $\mathscr{C}$ de centre Ω et de rayon r a pour équation $(x - x_\Omega)^2 + (y - y_\Omega)^2 = r^2$;*
- *le cercle $\mathscr{C}'$ de diamètre $[AB]$ est l'ensemble des points M vérifiant $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$.*

Cette dernière est une traduction moderne et concise de « Pour tout point M du cercle de diamètre $[AB]$ mais distinct de A et B, le triangle MAB est rectangle en M, et réciproquement si MAB est rectangle en M alors M est sur le cercle de diamètre $[AB]$. »

III Formules de trigonométrie.

Propriété 5 (Formule d'addition du cosinus et du sinus)**.** *Soit a et b deux réels.*
- $\cos(a + b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$
- $\cos(a - b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$
- $\sin(a + b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)$
- $\sin(a - b) = \sin(a)\cos(b) - \sin(b)\cos(a)$

Moyen mnémotechnique : Personnellement je les retiens avec « **cosinus est raciste et faux-jeton** *».*
i.e. Dans les formules pour $\cos(a + b)$ *et* $\cos(a - b)$ *les* cos *sont multipliés par des* cos*, ils ne se mélangent pas aux* sin *(*cos *est raciste) et faux-jeton car dans ces mêmes formules, le signe $+$ à gauche devient $-$ à droite et le signe $-$ devient $+$.*
Sinus est tout le contraire de cos *: il se mélange et ne change pas de signe.*