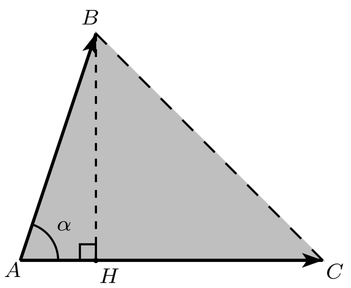
Introduction du produit scalaire.

Commencez par ouvrir le fichier `Produit-scalaire-defaut-ortho-INTRO-TP.ggb`

On cherche à déterminer une généralisation du théorème de Pythagore dans le cas où le triangle ABC n'est pas nécessairement droit en A. Selon si l'angle α en A est aigu ou obtus, on va calculer le défaut d'orthogonalité :

$$CB^2 - AB^2 - AC^2 = ?$$



En utilisant le point H on a :

① $CB^2 =$

② $AB^2 =$

③ $AC^2 = (HC + AH)^2 =$

En calculant ①−②−③ on a donc :

$CB^2 - AB^2 - AC^2$

$=$

$=$

$= -2AH($

$= -2AH \times AC$

On obtient donc :

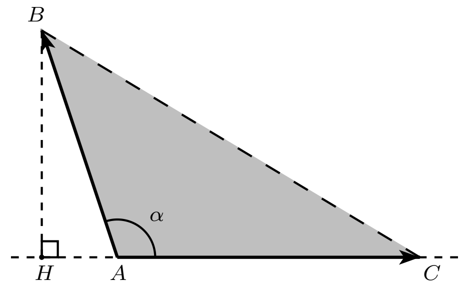
$$CB^2 = AB^2 + AC^2 - 2AH \times AC \qquad (1)$$

Si on veut éliminer H en utilisant l'angle α :

Dans ABH on peut écrire : $\dfrac{AH}{AB} = \cos\big($

Donc $AH =$

On remplace dans (1) pour obtenir :



En utilisant le point H on a :

① $CB^2 =$

② $AB^2 =$

③ $AC^2 = (HC - AH)^2 =$

En calculant ①−②−③ on a donc :

$CB^2 - AB^2 - AC^2$

$=$

$=$

$= 2AH($

$= 2AH \times AC$

On obtient donc :

$$CB^2 = AB^2 + AC^2 + 2AH \times AC \qquad (2)$$

Si on veut éliminer H en utilisant l'angle α :

Dans ABH : $\dfrac{AH}{AB} = \cos\big(\qquad\qquad = -\cos(\alpha)$

Donc $AH =$

On remplace dans (2) pour obtenir :

$$\boxed{CB^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \times \cos(\alpha)} \qquad \text{(Al-Kashi)}$$

Cette dernière égalité peut nous faire penser à l'identité remarquable $(x-y)^2 = x^2 + y^2 - 2xy$.

Il est faux de dire que $CB = AB - AC$ mais avec des vecteurs on a $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \qquad\qquad = \overrightarrow{CB}$.

Par analogie on aimerait donc pouvoir écrire :

$$\left(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}\right)^2 = \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AC}^2 - 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$$

Pour faire celà il faudrait définir le produit de vecteurs $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ comme valant $AB \times AC \times \cos(\alpha)$

Définition 1. On appelle *produit scalaire* des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$, le nombre réel noté $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ égal à $AB \times AC \times \cos(\alpha)$ où α est l'angle $\left(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}\right)$. Ainsi pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ on a par (Al-Kashi)

$$\boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = ||\vec{u}|| \times ||\vec{v}|| \times \cos(\vec{u}\,;\vec{v}\,) = \frac{1}{2}\left(||\vec{u}\,||^2 + ||\vec{v}\,||^2 - ||\vec{u} - \vec{v}\,||^2\right)}$$